JUAN MURO*
JOAQUIN VERA GRIJALBA*

Fronteras de producción simétricamente duales

I. INTRODUCCION

El conocimiento del nivel de producción que puede alcanzarse a partir de un gasto fijo en factores de producción, es un problema que surge en repetidas ocasiones en la teoría económica de la producción. Las empresas se enfrentan frecuentemente a un vector exógeno de precios de los factores y tratan de conseguir, con la restricción de unos costes positivos dados, una optimización de sus condiciones de producción. La solución a este problema viene dada en términos técnico-económicos por una función de producción indirecta.

Tanto las empresas públicas como las del sector privado de la economía están interesadas en la respuesta a la cuestión planteada. Para destacar su importancia para el sector privado, prodríamos pensar en el comportamiento económico de las pequeñas explotaciones agrarias, en las que los agricultores producen en la mayor parte de los casos con precios y costes dados, mientras que parece superfluo insistir en la relevancia del tema para el sector público.

El problema ha sido tratado entre otros, por Hotelling (1932) Malmquist (1953), Shephard (1953), (1970), (1974) y Hanoch (1970), (1978). La teoría de la dualidad proporciona las herramientas adecuadas para el tratamiento del mismo. En sù contexto, se puede obtener la representación de las condiciones técnico-económicas de producción en el espacio de los precios a partir de la descripción de la tecnología en el espacio de los factores de producción.

* Dept. Econometría. Universidad de Alcalá de Henares.
** Dept. Teoría Económica. Universidad Autónoma de Madrid.

El enfoque simétrico de las relaciones de dualidad permite la obtención simultánea de la expresión indirecta de la tecnología de producción y de las formas funcionales específicas de una tecnología polar. Este hecho supone una ventaja adicional ya que facilita la deducción de nuevas funciones de demanda susceptibles de ser contrastadas empíricamente.

Dicho enfoque ofrece, asimismo, una nueva perspectiva de las relaciones existentes entre las conocidas formulaciones del lema de Shephard y la identidad de Roy.

Después de una breve síntesis de los conceptos más utilizados en la teoría de la dualidad en la producción, realizada en el apartado 2, nuestro artículo desarrolla en el apartado 3 un procedimiento gráfico para la obtención de las formas duales de una tecnología a partir de las primales y viceversa. El procedimiento anterior se usa en el apartado 4 para desvelar la simetría existente entre las tecnologías polares. Finalmente, en el apartado 5, se analizan las relaciones entre el lema de Shephard y la identidad de Roy.

II. REPRESENTACIONES ALTERNATIVAS DE LA TECNOLOGIA DE LA PRODUCCION

A lo largo del artículo utilizaremos dos representaciones de la tecnología de producción: la representación directa, es decir, la descripción de la tecnología en el espacio de los factores de producción; y la indirecta, en el espacio de los precios. La formalización de los diversos conceptos que manejaremos en nuestra exposición, nos permitirá aplicar los teoremas de dualidad de Shephard-Uzawa-McFadden, con lo que conseguiremos una mayor simplicidad en el tratamiento de los temas considerados.

En primer lugar, introduciremos un conjunto de definiciones relevantes para una caracterización directa de la tecnología, para pasar, a continuación, a exponer las definiciones apropiadas para la representación indirecta de la misma.

Definición 1ª:

Función de Producción. La función de producción se define como una aplicación.

$$f: R^n_+ \to R_+ \ ; \ y = f(\underline{x}) \ \forall \ \underline{x} \in R^n_+ \to y \in R_+$$

Definición 2ª

Conjuntos de Nivel. Para toda producción no negativa, el conjunto de posibilidades de producción, $L(y) \subseteq R_+^n$, se define como

$$L(y) = [\underline{x} \mid f(\underline{x}) \geqslant y] \qquad [1]$$

Definición 3ª:

Función de Distancia: La función de distancia, $D(1/y, x)$, de una tecnología se define como[1]

$$D(1/y,\underline{x}) = \begin{cases} 0 \ \forall \ \underline{x} \notin L(y) \\ \sup \ [\alpha \mid \frac{1}{\alpha} \underline{x} \in L(y) \ ; \ \underline{x} \in R_+^n \ ] \ , \ x \in L(y) \end{cases} \qquad [2]$$

La función de producción (Def. 1ª) cumple las condiciones de regularidad siguientes:

Condición A: $f(\underline{x})$ es una función definida para todo $\underline{x} \in R_+^n$, de valores reales, continua por la derecha, no decreciente en x,cuasicóncava, finita para valores finitos de $\underline{x}$, con $f(\underline{0}) = 0$ y no acotada para al menos una sucesión no acotada $[\underline{x}^N]$.[2]

El conjunto de posibilidades de producción (Def. 2ª) cumple:

Condición B: Para $y \in R_+$, $L(y)$ es un conjunto convexo, cerrado y no vacío, con libre disponibilidad[3]; $L(0) = R_+^n$ si $y > 0$ esto implica que $\underline{0} \in L(y)$: para todo $\underline{x}$ existe siempre un $y' > 0$ tal que $\underline{x} \notin L(y')$.[4]

La función de distancia cumple:

Condición C: $D(1/y,\underline{x})$ es una función positiva, de valores reales, definida y finita para todo $\underline{x} \in R_+^n$ finito, $1/y > 0$; no decreciente, homogénea de grado una y cóncava en $\underline{x}$, para $\frac{1}{y} > 0$ finito.

1. Pudiera pensarse que la definición de la función de distancia es demasiado complicada. Sin embargo, dicha formulación es necesaria para introducir el enfoque simétrico de la Teoría de la Dualidad. Ver Hanoch (1970), (1978).

2. Esta condición A puede encontrarse en Diewert (1971) y Hanoch (1970), (1978) y garantiza la existencia de una función de coste dual única.

3. La condición B puede hallarse en Hanoch (1970), (1978). La libre disponibilidad se define como:

$$\underline{x}' \geqslant \underline{x} \in L(y) \rightarrow \underline{x}' \in L(y) \ : \ y' > y \rightarrow L(y') \subseteq L(y).$$

4. Condiciones de regularidad de la función de distancia que puede verse en Hanoch (1970), (1978),. Si L(y) cumple la condición B, la función de distancia satisface la condición C.

En la figura 1 hemos representado los conceptos anteriores en el espacio de los factores de producción, en el supuesto de que existan dos factores y un sólo producto.

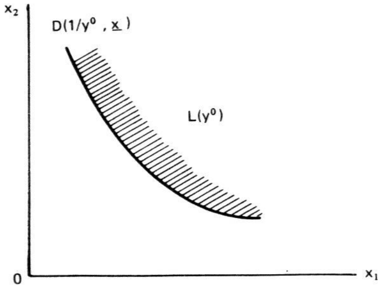

figura 1

La isocuanta y el conjunto eficiente correspondientes a un nivel de producto y^0 son respectivamente

$$\mathrm{Isoc}\,(y^0) = [\underline{x} \mid y^0 = f(\underline{x});\ \underline{x} \in R^n_+] \qquad [3]$$

$$\mathrm{Ef}\,(y^0) = [\underline{x} \mid y^0 = f(\underline{x}),\ y^0 > f(\underline{x}'),\ \forall \underline{x}' < \underline{x}] \qquad [4]$$

Los teoremas de dualidad de Shephard-Uzawa-McFadden garantizan, bajo las condiciones de regularidad A,B,C, la existencia en el espacio de los precios de conjuntos y funciones duales a los anteriores. Estos facilitan una representación indirecta de la tecnología. Como hemos señalado anteriormente, expondremos a continuación las definiciones de estas funciones y conjuntos en el espacio de los precios, señalaremos las condiciones de regularidad que cumplen y describiremos brevemente las relaciones de dualidad entre ambas representaciones.

Definición 4ª:

Función de Distancia. La función de coste se define en la forma habitual.

$$c(y,\underline{w}) = \underset{\underline{x}}{\mathrm{Min}}\ [\underline{w},\ \underline{x} \mid \underline{x} \in L(y)] \qquad [5]$$

Esta función viene determinada completamente por L(y) y es una función de distancia correspondiente a la representación indirecta de la tecnología, es decir, la descripción de la tecnología en el espacio de los precios. De hecho, si la estructura de precios se define de una manera apropiada, la definición de la función de coste presenta una expresión semejante a la definición 3ª.

$$c(y,\underline{p}) = \sup [\beta | 1/\beta\, \underline{p} \in V(1/y),\ \underline{p} \in R^n_+] \qquad [6]$$

donde V(1/y) son conjuntos de nivel en el espacio de los precios y $\underline{p} = \underline{w}/c$.

La función de coste cumple la condición C ya expuesta con el simple cambio de $(1/y, \underline{x})$ por $(y, \underline{p})$.

Definición 5ª:

Conjuntos de Nivel: El conjunto de coste unitario $V(1/y) \subset R^n_+$ se define como:

$$V(1/y) = [\underline{p} \mid c\,(y,\underline{p}) \geqslant 1] \qquad [7]$$

El conjunto de coste unitario cumple la condición B anterior cambiando y por 1/y.

Definición 6ª:

Función de Producción Indirecta: La función de producción indirecta g(w/c) se define como[5]

$$g\,(\underline{w}/c) = \inf\,[y \mid \underline{w} \in V(1/y)] \qquad [8]$$

Esta definición se situa en la línea de los conceptos similares utilizados en la teoría del consumidor y nos da la misma función definida por Malmquist (1953). Sin embargo, si utilizamos esta formulación de la función de producción indirecta, la simetría perseguida en la exposición de las representaciones directa e indirecta de la tecnología, queda destruída. Para mantener dicha simetría, podemos definir este concepto por medio de la función de producción indirecta recíproca, Hanoch (1970), (1978), $h(\underline{w}/c)$ que se formula como

$$h(\underline{w}/c) = \sup\,[1/y \mid c(y,\underline{p}) \geqslant 1] \qquad [9]$$

función que cumple la condición A anterior cambiando y por 1/y.

La dualidad relaciona f(x), L(y), D(1/y,x), con h(w/c), V(1/y), c(y,p) respectivamente; las relaciones de dualidad presentan una forma simétrica y los conceptos duales son simétricamente duales.

5. Es la llamada función de producción (coste) indirecta, Shephard (1970), (1974).

III. Superficies de indiferencia en el espacio dual

Malmquist (1953), citado en Hotelling (1932), establece el procedimiento de construcción de superficies de indiferencia en los precios: si partimos de una tecnología dada, descrita por una función de producción $y = f(\underline{x})$, supongamos ahora que la empresa se enfrenta a un vector de precios $\underline{w} \in R^n_{++}$, y a un coste fijo C^0. Las superficies de indiferencia en los precios se definen por medio de la maximización del producto bajo las restricciones tecnológicas y de coste. La superficie de indiferencia en los precios normalizados es

$$z^0 = g(\underline{w}/c^0),$$

si cambiamos z^0, podemos obtener un sistema de superficies de indiferencia en el espacio de los precios. Estas superficies de indiferencia (en los precios) son las superficies de nivel de una función de producción indirecta (Definición 6ª) que nos da el máximo producto que puede conseguir una empresa en presencia de costes y precios dados. La introducción de la palabra indirecta en el concepto se debe a la conveniencia de establecer una contraposición con la conocida función de producción directa, en la que se utilizan como argumentos las cantidades empleadas de factores de producción. Parece conveniente destacar, que los argumentos de la función de producción indirecta son precios normalizados: precios observados divididos por costes observados. En consecuencia, de la misma manera que el empresario se muestra indiferente en relación con puntos diferentes situados en una superficie de indiferencia en el espacio de los factores de producción, también es indiferente en relación con puntos diferentes (diferentes precios normalizados) situados sobre una superficie de indiferencia en el espacio de los precios.

En Malmquist (1953) puede verse una construcción gráfica de una curva de indiferencia en los precios para el caso de dos bienes, sin embargo, el procedimiento empleado es algo confuso; Shephard (1970) también describe un método basado en construcciones polares; Darrough y Southey (1977) han desarrollado, en el marco de la teoría del consumidor, un procedimiento geométrico que puede ser muy útil en nuestro análisis. A continuación, tomando como referencia el último procedimiento apuntado, representaremos gráficamente los conceptos definidos en el apartado 2 para el caso de un producto y dos factores de producción; asimismo, describiremos un método geométrico para pasar de la representación directa a la representación indirecta de la tecnología y viceversa.

Empezaremos por la obtención de la representación de la tecnología en el espacio de los precios a partir de su representación directa. Hemos dibujado en el cuadrante 1 de la figura 2, una isocuanta correspondiente a un nivel de producción y^0. Esta isocuanta se define en términos de la función de producción [3]. [6]

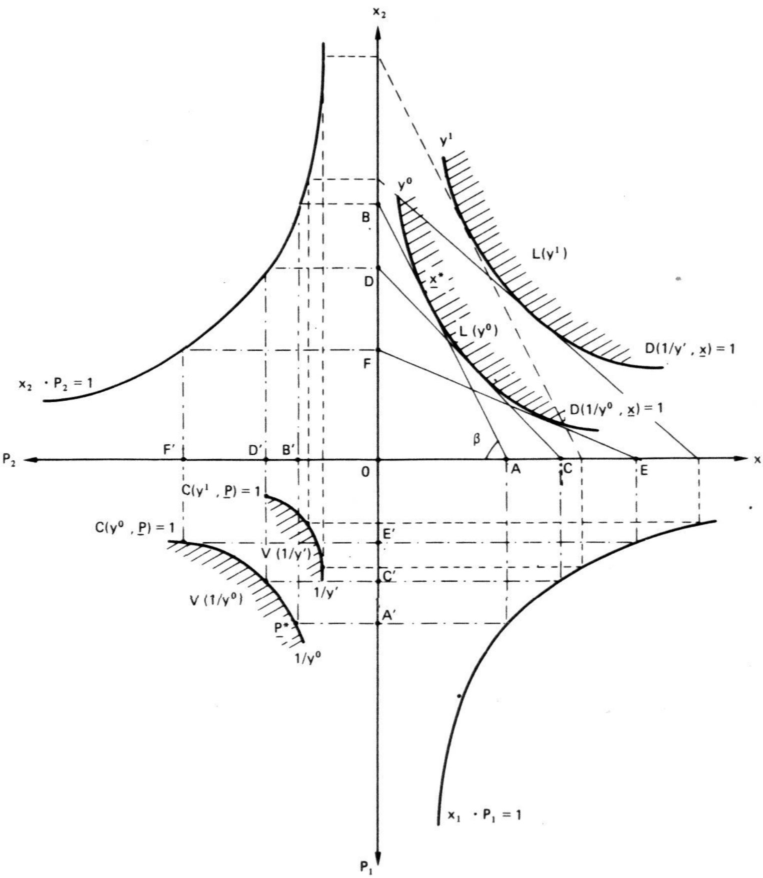

figura 2

6. Definiciones alternativas de una isocuanta pueden formularse en términos de los conjuntos de nivel y de la función de distancia.

$$\text{Isoc}(y) = [\ \underline{x} \mid \underline{x} \in L(y^0),\ \forall\, y' < y^0 \rightarrow \underline{x} \notin L(y')\ ;\ \underline{x} \in R^n_+\ ]$$

$$\text{Isoc}(y) = [\ \underline{x} \mid D\,(1/y^0, \underline{x}) = 1;\ \ \underline{x} \in R^n_+\ ]$$

La figura presenta tres líneas isocoste AB, CD, EF que representan el coste mínimo de producir y^0 en distintas condiciones de precios. En el espacio de los factores de producción los puntos A,B,C,D,E,F son las intersecciones de las líneas isocoste con los ejes de coordenadas. Las coordenadas de dichos puntos representan las correspondientes relaciones entre costes y precios. El comportamiento racional de la empresa lleva a unos vectores de demanda de inputs de producción (puntos de tangencia) que maximizan la producción sujeta a la restricción del coste dado.

En los cuadrantes 2 y 4 de la figura hemos dibujado hepérbolas equiláteras unitarias: $x_1 p_1 = 1$; $x_2 p_2 = 1$. En el caudrante 2 podemos deducir los puntos que corresponden a A,C,E a través de la hipérbola equilátera dibujada en el espacio de precios y cantidades; como puede verse en la figura, estos puntos son el A', C', E', cuyas coordenadas con relaciones entre precios y costes, es decir, los llamados precios contables o normalizados: precios observados divididos por costes observados. Por el mismo procedimiento llegamos a los puntos B', D', F' en el cuadrante 4. Aquellos puntos del cuadrante 3 cuyas coordenadas son (A., B'), 'C', D'), (E',F') están situados sobre la curva de nivel correspondiente a y^0 en el espacio de los precios. La repetición del procedimiento nos permite llegar a todos los puntos del espacio de los precios que se corresponden con todas las posibles rectas isocoste tangentes a la isocuanta y^0 en el espacio de los factores de producción. El lugar geométrico de estos puntos es la llamada "frontera de precios de los factores" o "frontera de posibilidades de precios". Esta frontera puede definirse de diversas maneras.

Función de distancia:

$$I(1/y^0) = [\underline{p} \mid c(y^0, \underline{p}) = 1 \quad ; \quad \underline{p} \in R_+^n \qquad [10]$$

Conjuntos de Nivel:

$$I(1/y^0) = [\underline{p} \mid \underline{p} \in V(1/y^0), \ \forall 1/y' < \frac{1}{y^0} \ \underline{p} \notin V(1/y')] \qquad [11]$$

Función de Producción Indirecta:

$$I(1 / y^0) = [\underline{p} \mid h(p) = 1/y^0 \quad ; \quad \underline{p} \in R_+^n \,] \qquad [12]$$

La ecuación [10] sugiere que el nivel de indiferencia en los precios puede denominarse también "frontera de coste unitario", es decir el conjunto de vectores de precios entre los que la empresa se muestra indiferente si intenta producir y^0 con un coste fijo.

Supongamos que en vez de un nivel de producción y^0 tomamos en consideración un nivel y^1 de producción y deseamos nuevamente dibujar su correspondiente nivel de indiferencia en los precios. El prodcedimiento anterior nos sirve pra hallar la curva $1/y^1$ en el cuadrante 3 de la figura 2. De esta manera, podemos obtener geométricamente el mapa de curvas de nivel en el espacio de los precios, dual al mapa de isocuantas en el espacio de los factores de producción.

Parece oportuno resaltar que ambas representaciones alternativas son simétricamente duales en el sentido de Hanoch (1970), (1978). Los puntos situados en la frontera de coste unitario son "polos" de las líneas isocoste correpondientes en el espacio de los factores de producción. Es decir, si $\underline{p}^0$ (A', B') es el punto obtenido en la figura a partir de AB, la ecuación $\underline{p}^0 \cdot \underline{x} = 1$, $\forall\ \underline{x} \in [AB]$, se cumple siempre. Además, el punto $\underline{p}$ y la línea $\overline{AB}$ son recíprocamente polares con respecto a la esfera unitaria $\sum_i x_i = 1$, Shephard (1953) . Por lo tanto, si avanzamos en el espacio de los factores de producción, desde el origen hacia afuera, nos encontraremos con isocuantas correspondientes a niveles crecientes de producto ($y^1 > y^0$), mientras que si efectuamos el mismo movimiento en el espacio de los precios, ocurrirá lo mismo ($1/y^0 > 1/y^1$).

Después de describir el paso de la representación directa a la indirecta de una tecnología, pasamos a analizar el procedimiento inverso. Supongamos que conocemos el mapa de curvas de indiferencia en el espacio de los precios, es decir, la función de producción indirecta y que, asímismo, disponemos de información sobre los precios normalizados, es decir, precios y costes observados, y nos planteamos la reconstrucción de la representación directa de la tecnología en el espacio de los factores de producción. Par resolver esta cuestión utilizaremos un procedimiento semejante al anterior.

En la figura 3 hemos dibujado el mapa de indiferencia de $g(\underline{p})$ (función de producción indirecta). Supongamos un precio normalizado concreto p^*, este precio estará situado sobre una curva de indiferencia en los precios que hemos designado en la figura como correspondiente a una producción y^0. Para deducir la representación directa a partir de los datos anteriores demostraremos en primer lugar que en las actuales condiciones el comportamiento racional del empresario le llevará a demandar un vector de inputs representado por la tangente a la curva de indiferencia y^0 en $\underline{p}^*$.

Para demostrarlo, enfocaremos el problema de la empresa desde un punto de vista subrogado en el sentido dado a la palabra por Samuelson (1953): en vez de considerar que son los precios la restricción sufrida por la empresa, supondremos que ésta trata de encontrar, con

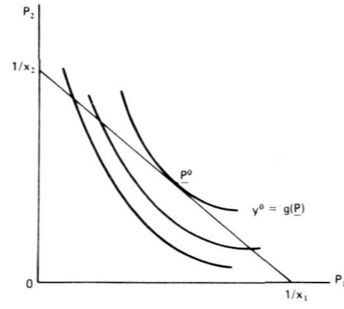

figura 3

inputs y costes dados, la combinación de precios bajo la que habría demandado los inputs conocidos como óptimos. Como sabemos, la solución de este problema subrogado es minimizar el producto máximo alcanzable. Sea MN la recta isocoste que representa las diferentes combinaciones de precios posibles para una combinación de factores (x_1^0, x_2^0) y un coste C dados, es decir, $p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0 = 1$, donde los p_i son precios normalizados. Ya que $g(\underline{p})$ crece conforme nos acercamos al origen y el valor de $g(\underline{p})$ representa el máximo producto alcanzable para cualquier precio normalizado, la minimización del máximo se alcanzará en el punto en que la recta isocoste sea tangente a $g(\underline{p})$, es decir, $\underline{p}^*$.

Si el mapa indirecto lo hubiéramos representado por las curvas de nivel de $h(\underline{p})$ (función de producción indirecta recíproca) para conservar la simetría, podríamos haber dado una explicación diferente para justificar que la empresa, para un precio normalizado dado, demanda una combinación de inputs representada por la tangente a la curva de indiferencia en los precios en el punto dado. En la figura 4 hemos representado este razonamiento. Supongamos de nuevo que $\underline{p}^*$ está situado sobre la curva de nivel $1/y^0$ $[1/y^0 = h(\underline{p}^*)]$; en este contexto el problema puede formularse en los términos siguientes: ¿Qué combinación de inputs explicará que la empresa, sujeta a una restricción de coste dada, escogerá $\underline{p}^*$ como la combinación de precios óptima?[7]

El punto $\underline{p}^*$ nos facilita información sobre costes y precios observados. Con una combinación de precios observada, la empresa puede demandar infinitas combinaciones de inputs con la única limitación

7. El enfoque basado en h(p) considera que la empresa intenta encontrar el vector de factores que, en las condiciones dadas, le permite optimizar su función objetivo.
Nótese que, en este caso, la empresa maximiza el índice del nivel de producto (1/n) en lugar de maximizar el nivel real de producto (puede considerarse que toma como referencia una imagen especular de su función objetivo).

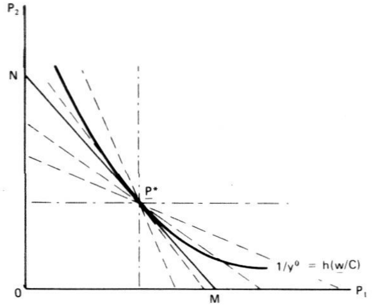

figura 4

de que se cumpla la restricción que representa el nivel de coste dado; todas estas posibles combinaciones están representadas en la figura 4 mediante rectas que pasan por $\underline{p}^*$, es decir $m(p_1 - p_1) = (p_2 - p_2^*)$. Las posibilidades extremas están descritas por las líneas horizontal y vertical; la primera representa el caso en que x_2 es el único factor demandado y la segunda cuando esto ocurre con x_1. Suponiendo un comportamiento racional, una vez que la combinación de inputs sea escogida, la empresa maximizará su producto escogiendo un vector de precios representado por el punto de tangencia entre la recta isocoste y una curva de indiferencia (en los precios). Si la combinación de inputs fuera la AB produciría $1/y^1 > 1/y^0$ y escogería $\underline{p}^{**} \neq \underline{p}^*$... Cualquier combinación de inputs distinta de $\underline{x}^*$ (representada por MN) induciría a la empresa a producir un producto mayor que $1/y^0$ (es conveniente recordar que la función de producción indirecta recíproca crece hacia afuera), con una combinación de precios distinta de $\underline{p}^*$. De esta manera, sólo MN, es decir $\underline{x}^*$) puede explicar la elección de $\underline{p}^*$ como el vector de precios óptimo.[8]

El razonamiento anterior nos permite reconstruir el mapa de isocuantas. En la figura 5 hemos dibujado de nuevo hipérbolas equiláteras. en los cuadrantes 2,4; M', N', los puntos correspondientes a M.N a través de las hipérbolas equiláteras se han dibujado, ambos representan las coordenadas de un punto $\underline{x}^*$ en el espacio de los factores de producción situado sobre una isocuanta y^0, y representa la demanda de inputs de la empresa (suponiendo el comportamiento maximizador) en las condiciones presentes. La repetición del procedimiento nos permite reconstruir la isocuanta y^0 a partir de la curva de nivel (isocoste) $1/y^0$.

8. El máximo índice del nivel de producto se alcanza minimizando la función h(p), función que incorpora un proceso de maximización. Obsérvese que la minimización del recíproco conduce, de hecho, a la maximización del nivel real de producto.

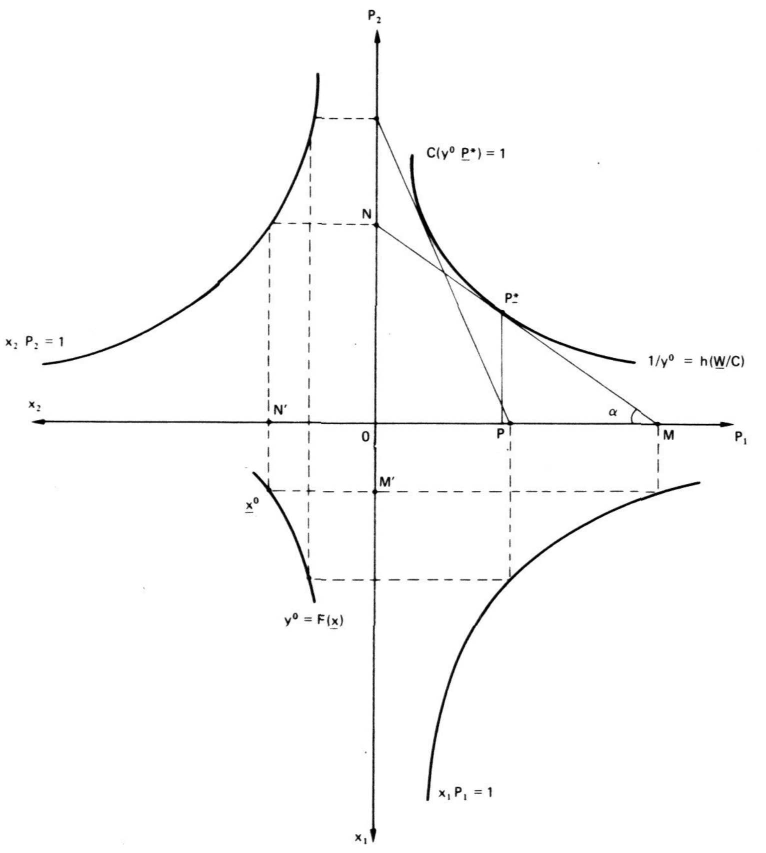

figura 5

IV. Dualidad simetrica

La formulación simétrica de la dualidad entre las representaciones directa e indirecta de una tecnología y Hanoch 1970, (1978), tiene una ventaja adicional que, en palabras del propio Hanoch, puede expresarse como "llévese dos por el precio de una". En efecto, dada una tecnología que puede describirse directamente -relaciones primales: $f(\underline{x})$, $L(y)$ o $D(1/y, \underline{x})$ o indirectamente -relaciones duales: $C(y, R)$, $V(1/y)$, $g(w/c)$, $h(w/c)$, existe una tecnología polar que puede representarse únicamente por cualesquiera de las relaciones, directas o indirectas, siguientes

$$\begin{aligned} &g(\underline{x})\ ,\ V(y)\ ,\ C(1/y,\underline{x}) \\ &D(y,\underline{p})\ ,\ L(1/y)\ ,\ f(\underline{w}/D)\ ,\ [f(\underline{w}/D)]^{-1} \end{aligned} \qquad [13]$$

Es decir, la representación de la tecnología polar tiene la forma funcional de la tecnología primal pero habiéndose intercambiado las relaciones funcionales y las variables primales (duales) por las duales (primales).

En la figura 6 aparece una representación gráfica de las tecnologías polares. Las líneas isocuantas y de costes unitarios pueden conseguirse a través de una construcción simétrica realizada entre los cuadrantes 1,3 de la figura. Si dibujamos en los cuadrantes 2,4 la recta $x_i = p_i$, los puntos de la tecnología se derivan de los puntos duales de la primitiva por medio de una reflexión sobre la bisectriz de los cuadrantes y viceversa. Entonces, cuando estamos dibujando y hallando las formas duales simétricas de una tecnología, de hecho estamos hallando también las formas de una tecnología polar. Las formas detrás del espejo están volviendo a la vida.

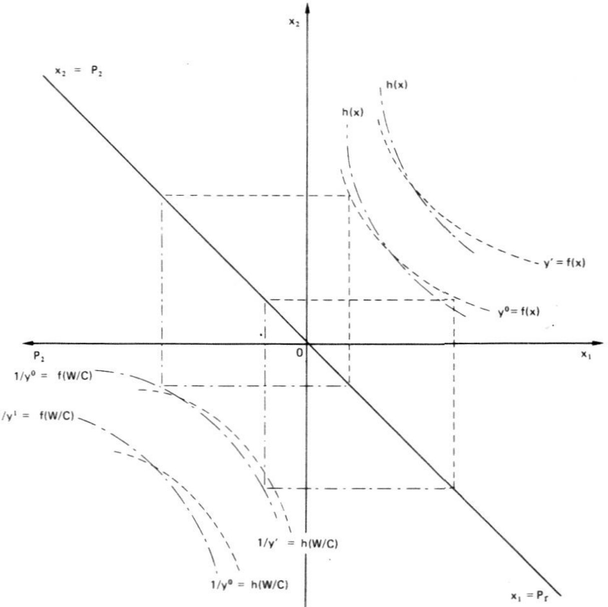

figura 6

V. La identidad de Roy y el lema de Shephard

La exposición gráfica de la dualidad simétrica entre las representaciones de una tecnología realizada en los apartados anteriores, tiene la ventaja adicional de proporcionar una visión de las relaciones existentes entre las bien conocidas formulaciones del Lema de Shephard y de la Identidad de Roy.[9]

Volviendo a la figura 5, consideremos una empresa representada por el punto $p^* \equiv (w_1/c, w_2/c)$ que se encuentra situado en el cuadrante 1 de la figura. La empresa con precios observados $\underline{w}$ (w_1, w_2) y coste observado c está sobre la curva de nivel correspondiente a $1/y^0$. Las coordenadas del punto x^* de cuadrante 3, que representa la demanda de inputs en condiciones de maximización, se ha obtenido geométricamente a través de las hipérbolas equiláteras situadas en los cuadrantes 2,4 de la figura. La coordenada X_1^* puede calcularse mediante

$$x_1^* \cdot p_1 = 1 \quad ; \quad x_1^* \cdot OM = 1 \quad ; \quad x_1^* = 1/OM.$$

Pero, como puede verse en la figura, $OM = OP + PM$ y $OP = w_1/c$, mientras que PM es

$$PM = w_2/c \cdot tg(90 - \alpha) \tag{14}$$

Expresión que nos permite encontrar el valor buscado. La forma específica de la expresión anterior depende de la forma particular que adopte la curvatura incluída en la misma. De hecho, puede expresarse, al menos, de dos maneras distintas

a) basada en la función de coste

$$x_1^* = \left\{ w_1/c + w_2/c \cdot \left.\frac{\partial c(y,\underline{p})}{\partial P_2}\right|_{\underline{p}^*} \Bigg/ \left.\frac{\partial c(y,\underline{p})}{\partial P_1}\right|_{\underline{p}^*} \right\}^{-1}$$

sea $w_1/c = p_1^*$, entonces

9. Una exposición similar puede encontrarse, para la teoría del consumidor, en Weymark (1978).

$$x_1^* = \left\{ p_1^* + p_2^* \left.\frac{\partial c(y,p)}{\partial P_2}\right|_{\underline{p}^*} \Bigg/ \left.\frac{\partial c(y,\underline{p})}{\partial P_1}\right|_{\underline{p}^*} \right\}^{-1}$$

$$x_1^* = \left.\frac{\partial c(y,\underline{p})}{\partial P_1}\right|_{\underline{p}^*} \qquad [15]$$

Este resultado se puede ampliar para cualquier subíndice i, siendo el conocido lema de Shephard.

b) basado en la función de producción indirecta.

$$x_1^* = \left\{ w_1/c + w_2/c \cdot \left.\frac{\partial h(\underline{p})}{\partial P_2}\right|_{\underline{p}^*} \Bigg/ \left.\frac{\partial h(\underline{p})}{\partial P_1}\right|_{\underline{p}^*} \right\}^{-1}$$

$$x_1^* = \frac{h}{p_1^* h_1 + p_2^* h_2} \qquad [16]$$

Expresión obtenida de manera semejante y que puede considerarse como la identidad de Roy para el caso de funciones de producción indirectas.

Si volvemos ahora a la figura 2, podemos deducir unas expresiones semejantes sustituyendo las variables duales por las primales.

La empresa está representada en este caso por el punto $\underline{x}^* \equiv (x_1^*, x_2^*)$ con una recta isocoste AB y obtenemos la demanda inversa (precio normalizado) en esta situación. Por el mismo procedimiento anterior, las coordenadas p_1^*, p_2^* pueden calcularse como

$$p_1^* \cdot OA = 1 \;;\; p_1^* = 1/OA = w_1/c$$

En la figura 2, $OA = OX + XA$, y $OX = x_1^*$, mientras que XA puede expresarse en términos de la curvatura de la isocuanta

$$XA = x_2^* \operatorname{tg}(90 - \beta) \qquad [17]$$

Expresión que puede evaluarse de dos maneras distintas:

c) basada en la función de distancia

$$p_1^* = \left\{ x_1^* + x_2^* \cdot D_2 \Big|_{\underline{x}^*} \Big/ D_1 \Big|_{\underline{x}^*} \right\}^{-1}$$

$$p_1^* = \frac{\partial D\,(1/y,\underline{x})}{\partial x_1} \Bigg|_{\underline{x}^*} \qquad [18]$$

El lema de Shepard otra vez.

d) basada en la función de producción

$$p_1^* = \frac{f_1}{x_1^* f_1 + x_2^* f_2} \qquad [19]$$

Que en un sentido amplio puede considerarse una forma de la identidad de Roy.

Por consituiente, la dualidad simétrica se ha ampliado al cálculo de las funciones de demanda, y de las funciones de demanda inversa, (a) – (c) y (b) – (d) respectivamente, como una manifestación de la dualidad estructural existente entre ambas representaciones alternativas de la tecnología.

VI Conclusiones

Las relaciones de dualidad en la teoría de la producción y, por tanto, la posibilidad de representar indistintamente una tecnología de producción por su función de producción o de costes, son bien conocidas. Lo que no es tan conocido es la dualidad entre conceptos (relaciones funcionales y espacios en que se definen éstas) y cómo pueden obtenerse unos a partir de otros.

El procedimiento gráfico utilizado en este artículo hace transparentes estas relaciones duales al tiempo que ilustra la relación entre tecnologías polares y el proceso de obtención de formas funcionales polares. Asimismo, es inmediata la aplicación del método utilizado para profundizar en la comprensión de la extensión de la dualidad a los teoremas de Shephard y Roy.

La relevancia teórica de estos resultados es clara ya que permite la representación de un problema de optimización en términos de las relaciones funcionales y espacios más adecuados al tratamiento del mismo. En efecto, no sólo no hay pérdida de información sobre el proceso de producción, sino que los teoremas fundamentales se mantienen en ambos espacios (cantidades de factores y de precios normalizados).

Desde un punto de vista empírico, la existencia de tecnologías polares con las adecuadas condiciones de regularidad permite obtener rápidamente meras formas funcionales.

BIBLIOGRAFIA

DARROUGH, M.N.: SOUTHEY, C. (1977): "Duality in Consumer Theory Made Simple: The Revealing of Roy's Identity" *Canadian Journal of Economics,* X, (pp. 307-17).

DIEWERT, E.W. (1971): "An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontieff Production Function", *Journal of Political Economy,* LXXIX, (pp. 481-507).

HANOCH, G. (1970): "Generation of new Production Functions through duality", Discussion Paper nº 118, Harvard Institute of Economic Research, Harvard University, Cambridge, Mass.

HANOCH, G. (1978): "Symmetric Duality and Polar Production Functions", en Fuss, M. y McFadden, D. (eds), *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications,* (pp. 111-132), Amsterdam: North-Holland.

HOTELLING, (1932): "Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions", *Journal of Political Economy,* XL, (5), (pp. 577-616)

MALMQUIST, (1953): "Index Numbers and Indifference Surfaces", *Trabajos de Estadística.*

SAMUELSON, P.A. (1953): "Prices of Factors and Goods in General Equilibrium", *Review of Economic Studies,* XXI, (1), (pp. 1-20).

SHEPHARD, R.W. (1953): *Cost and Production Functions,* Princeton N.J.; Princenton University Press.

SHEPHARD, R.W. (1970): *Theory of Cost and Production Function* Princenton, N.J.: Princenton University Press.

WYMARK, J. (1978): "Duality Results in Demand Theory", Discussion Paper 73-78, Vancouver, Canada: University of British Columbia.